

L'infini : de l'intuition à la formalisation. ¹

Richard O'Donovan

`richard.o-donovan@edu.ge.ch`

Une des réponses possibles aux difficultés de l'enseignement de l'analyse pourrait être l'utilisation de "l'analyse non standard", c'est à dire une analyse utilisant des infinitésimaux et des infiniment grands, justifiés formellement depuis les années 60 à la suite des travaux de Robinson et de Nelson.

On rappellera que la théorie des limites ε, δ a été créée parce qu'au XIX^e siècle, il n'avait pas été possible de proposer une construction rigoureuse des infinitésimaux. Cette théorie Cauchy-Weierstrassienne est apparue à cause d'une faiblesse théorique des mathématiques de l'époque. Néanmoins, l'analyse avec des infinitésimaux est historiquement la première et nombre de mathématiciens utilisent les infinitésimaux dans la recherche de solution, même si leurs démonstrations se font dans la théorie des limites.

Il ne s'agit pas ici de discuter du bien fondé de telle ou telle approche mais plutôt de montrer comment, du point de vue didactique, les élèves peuvent s'approprier le concept d'infiniment petit et travailler avec le degré de rigueur qu'on peut en attendre.

Mise en garde :

La plupart des mathématiciens et enseignants de mathématiques font toute leur carrière sans jamais avoir à réfléchir au système d'axiomes dont ils dépendent. Ils peuvent ainsi, par habitude, être amenés à considérer que le système mathématique actuel est LE modèle – au sens du seul modèle possible. On sait depuis Gödel et Turing qu'un tel modèle ne pourra jamais exister. Néanmoins, la philosophie dominante dans le monde mathématique semble être de faire comme si de rien n'était et continuer à croire au modèle mathématique unique et complet.

Confrontés à l'analyse non standard, beaucoup de mathématiciens réagissent fortement. Ils se retrouvent confrontés à un autre modèle qui les oblige à reconnaître explicitement que ce qu'ils prenaient pour Le modèle, n'est qu'un des choix possibles. Leurs intuitions, leurs "vérités" sont dictées par le système dans lequel ils travaillent. Cette situation, qui pour certains est déstabilisante, n'est pas comparable à la situation dans laquelle se trouvent les élèves. Face à une situation nouvelle, l'élève ne connaît pas de conflit avec des connaissances antérieures.

¹Ce qui suit est une adaptation commentée des transparents présentés lors des journées SSRDM du 22-23 avril 2005 à Lausanne.

Dans ce qui suit, il est demandé aux enseignants d'accepter que certaines de leurs "évidences" ne sont en fait que des évidences apprises. Notamment, il faut ici accepter que la droite et les réels sont distincts! Que la droite et les réels soient une même chose est une "vérité" fondamentale pour bien des mathématiciens. Ici, on considère que la droite n'est pas un ensemble de points. Des objets de dimension nulle ne font pas un objet de dimension un. (La complétude de \mathbb{R} n'est pas contredite. Tout ensemble majoré dans \mathbb{R} possède un plus petit majorant dans \mathbb{R} .)

Une indication pour montrer comment on peut en arriver à raisonnablement penser de la sorte : \mathbb{R} est dense, ce qui signifie qu'il n'y a pas de relation de successeur dans les réels ; il n'y a pas de prochain réel après 1. On peut donc considérer que les réels ne peuvent pas être en contact avec leurs voisins, car s'ils étaient en contact, l'un serait le successeur de l'autre. Il y a donc une sorte de "vide" autour d'un réel – vide non mesurable par des réels, évidemment.

Ainsi, les réels "n'épuisent pas la droite".

Il n'est pas nécessaire d'en savoir plus pour ce qui suit.

Une distinction à faire dès lors que l'on parle d'infini est la différence entre infini potentiel et infini actuel. Cette distinction doit être comprise de l'enseignant car c'est le passage du potentiel à l'actuel qui est le point crucial.

Infini potentiel
(infini en puissance)

$$\forall x \exists y \quad y > x + 1$$

x et y appartiennent au même ensemble. C'est l'ensemble qui est potentiellement infini.

L'infini potentiel est l'infini des processus sans fin.
Le comptage des entiers naturels est potentiellement infini.

Infini actuel
(infini en acte)

$$\exists y \forall x \quad y > x + 1$$

y ne fait pas partie du même ensemble que x. C'est l'élément y qui est actuellement infini par rapport à l'ensemble contenant x.

L'infini actuel est l'infini considéré dans sa "totalité".
Le cardinal des entiers naturels est un infini actuel.

$\lim_{x \rightarrow \infty}$	potentiel
-------------------------------	-----------

x est infiniment grand	actuel
------------------------	--------

$\lim_{x \rightarrow a}$	potentiel
--------------------------	-----------

x est infiniment proche de a	actuel
------------------------------	--------

Les exercices suivants sont donnés en classe au début de l'étude de l'analyse. Les élèves n'ont pas encore rencontré la notion de dérivée et la tangente est pour eux un objet purement géométrique.

Exercice 1

Tenez un crayon immobile devant vous.
Sa vitesse (verticale) est nulle.
Lâchez-le.

Quelle était sa première vitesse non-nulle ?

Les réponses des élèves mettent systématiquement en jeu le concept d'infiniment petit.

Le fait qu'il n'y ait pas de plus petite vitesse non nulle est sans doute tellement inconfortable que cette possibilité n'est jamais évoquée. On y revient en classe, mais bien plus tard – ce n'est pas le but de cet exercice que de répondre complètement à la question. On peut néanmoins partager la perplexité : il a bien fallu que ce mouvement *commence...*

Exercice 2

Considérez la suite

$$1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; \dots$$

Où va cette suite ?

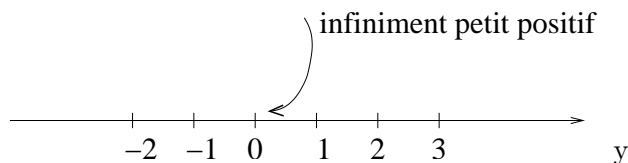
Considérez la suite

$$\frac{1}{1} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6} ; \dots$$

Où va cette suite ?

Cet exercice permet un passage conceptuel crucial. La première suite “ne s’arrête jamais” ou “va à l’infini”. Elle est reconnue comme infinie au sens potentiel. On ne saurait d’ailleurs placer l’*endroit* atteint puisqu’il s’enfuit sans cesse. ²

Ensuite, en travaillant sur les inverses apparaît que cette suite va “vers l’infiniment petit” mais en tout cas, pas à zéro. On peut tracer sur une droite l’*endroit* où va cette suite, car c’est “collé au zéro par la droite”.



Cet infiniment petit devient donc un infiniment petit actuel, parce qu’on sait où il se trouve... Et il est donc un “nombre” plutôt qu’un objet qui s’enfuit.

Dès lors, on propose de répéter l’opération : quel est l’inverse d’un infiniment petit (actuel) ? L’infiniment grand actuel devient alors à son tour un nombre.

²A. Scheibler nous a montré un travail d’élève où l’on voit : $x = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8... = 1 + 1/2(1 + 1/2 + 1/4...) = 1 + 1/2x$ La question cruciale, qui met en jeu soit l’infini actuel, soit une définition du type limite, est : est-ce qu’on peut fermer cette parenthèse puisqu’il n’y a aucun endroit pour la fermer ?

Exercice 3

Les physiciens ont observé que la position d'un objet tombant dans le vide, sur terre, dépend du temps de chute écoulé, selon la formule

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Quelle est la vitesse d'un objet en chute libre depuis 3 secondes ?

(On prendra $g \approx 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$.)

Le calcul effectué sur “le dernier instant” fait apparaître que si cet instant est infiniment court, on trouve un résultat infiniment proche de 30 m/s.

Les élèves ont fréquemment utilisé x pour la durée de cet instant, car c'est le “nom des choses inconnues”.

Par ailleurs, cet exercice fait surgir des questions de type “métaphysique” qui ont traversé et traversent encore toute réflexion philosophique sur le temps.

-
- Qu'est-ce qu'un instant ?
 - Quelle est la plus petite unité de temps : un point, un intervalle ?
 - Qu'est-ce qu'une vitesse “instantanée” ?
 - Le temps est-il continu ?
(temps de Planck : $10^{-43}s$)
-

Exercice 4

On lance un objet en l'air. Il monte et puis retombe. Que se passe-t-il entre les deux ?

Quelle est la dernière vitesse de l'objet en montée ?

Les questions 3 et 4 pourraient induire un calcul de type limite car on pose une question sur la **fin** d'un processus.

La question 1 parle d'un **début** de processus et ne permet pas d'envisager la limite (on ne peut pas inverser le temps).

Les questions 1 et 2 sont posées avant les questions 3 et 4. C'est l'idée d'intervalle infiniment petit qui émerge (toujours observé).

Exercice 5

Soit δ un infinitésimal positif ;

- Dessinez à l'échelle 1cm pour une unité, une droite entre -4 et 4. Placez sur cette droite : 1 ; -2 ; $2 + \delta$; δ ; $-2 + 10^5 \cdot \delta$
 - Faites un zoom sur une partie de cette droite : centré sur 2, agrandissez d'un facteur $\frac{1}{\delta}$
 - Que y a-t-il 1cm à droite de 2 ?
 - Que y a-t-il 3cm à gauche de 2 ?
 - Où se trouve 2,5 ?
 - Placez $2 + \delta^2$ sur cette droite.
-

Exercice 6

Soit δ un infinitésimal positif

$$f : x \mapsto x^2 \quad g : x \mapsto |x| \quad h : x \mapsto x^3$$

Faites un zoom centré sur $\langle 1; 1 \rangle$, agrandi d'un facteur $\frac{1}{\delta}$, des trois fonctions f, g, h .

Placez $1, 1 + \delta, 1 - \delta, f(1), f(1 + \delta), f(1 - \delta)$ et les points correspondants pour les autres fonctions.

Faites un zoom centré sur $\langle 0; 0 \rangle$, agrandi d'un facteur $\frac{1}{\delta}$, des trois fonctions f, g, h .

Placez $0, \delta, -\delta, f(0), f(\delta), f(-\delta)$ et les points correspondants pour les autres fonctions.

Tout est là ! La dérivée apparaît d'elle même comme la pente de la droite qui, à l'échelle des infiniment petit choisis, est indistinguable de la courbe. Pour $y = |x|$ en $x = 0$ on observe une pointe, alors se pose la question de savoir si la pente est définie en ce point.

On observe aussi que la fonction devient quasi-linéaire si la variable varie de manière infinitésimale, la fonction est la somme d'une partie linéaire et d'une partie infiniment petite non linéaire. C'est exactement le sens de la dérivée – et plus tard de la série de Taylor.

Il est temps de donner une définition formalisée :

Définition :

Un infinitésimal est un nombre non nul plus petit en valeur absolue que n'importe quel nombre réel positif non nul.

Zéro est-il infinitésimal ? C'est uniquement une question de choix. Il faut veiller à la cohérence de définition. Il nous a semblé intéressant de bien distinguer ce qui intuitivement est différent, à savoir : “converger vers” et “atteindre” sont deux choses différentes.

On considère donc ici un corps, extension de réels, contenant des infinitésimaux.

Corps archimédien \mathcal{A} :

$$\forall x \in \mathcal{A} \exists n \in \mathbb{N} \quad |x| \cdot n > 1$$

Permet aussi de définir les infinitésimaux.

Formalisation

Exercice 7

Soit δ, ε des infinitésimaux positifs. En utilisant la définition,

- montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta \cdot n < 1$$

- montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{\delta} > n$$

- $\delta + \varepsilon$ est infinitésimal.
- $\delta \cdot \varepsilon$ est infinitésimal.
- $\frac{\delta}{\varepsilon}$ peut être de n'importe quel ordre de grandeur.

Tous ces exercices peuvent se faire par contraposition ou par l'absurde.

Si $\delta \cdot n > 1$ alors $\delta > \frac{1}{n}$ or comme n est entier, $\frac{1}{n}$ est réel, donc δ n'est pas infinitésimal.

Ce type de démonstration (utilisation d'une définition pour en tirer des conséquences) est assez inhabituel au collège. C'est donc un apport intéressant.

Si $x \simeq y$ signifie “ $x - y$ est infinitésimal ou nul,” on dira : x et y sont infiniment proches.

Exercice 8

Montrez les propriétés suivantes :

Si $a \simeq b$ et $c \simeq d$

- $(a + c) \simeq (b + d)$
- $a \cdot c \simeq b \cdot d$
- Si c et d sont non nuls : $\frac{a}{c} \simeq \frac{b}{d}$

Ici, il suffit de poser $a = b + h$, $c = d + j$ avec h et j infinitésimaux et de procéder algébriquement.

Le produit fait apparaître des quantités telles que $a \cdot j$ et $b \cdot h$ qui sont infiniment petites, par l'exercice précédent. Et la quantité $h \cdot j$ qui est plus petite encore.

Le quotient ne pose pas de difficulté mais il est algébriquement un peu plus compliqué.

Conclusion

Les élèves ont une notion intuitive de l'infini potentiel. En prenant les inverses algébriques, le concept d'infinitésimal actuel leur apparaît comme conséquence raisonnable.

L'infinitésimal actuel acquiert le statut de "nombre" dès qu'il est reconnu.

En prenant l'inverse d'un infinitésimal actuel, l'infini actuel apparaît à son tour comme conséquence raisonnable.

Le travail à partir de la définition permet de démontrer toutes les propriétés nécessaires du calcul avec les infinitésimaux.

Un document (en anglais) est distribué en annexe. Publié dans une revue universitaire allemande (2005), il s'agit d'un exercice pour les mathématiciens, désirant se familiariser avec une construction simple mais rigoureuse d'un groupe additif contenant \mathbb{N} et des infiniment grands.